文章编号:1005-3085(2010)03-0567-04

Weibull 分布兴趣参数的广义置信区间*

赵桂梅，　崔玉杰

(北方工业大学理学院统计系，北京　100144)

摘　要: Weibull 分布可以用来描述疲劳失效、真空管失效和轴承失效等，是重要的寿命分布。本文研究了 Weibull 分布尺度参数、形状参数、分位数及可靠度函数的广义置信区间问题。利用广义枢轴量给出四个兴趣参数的广义置信区间。证明了由广义枢轴量确定的四个兴趣参数的广义置信区间具有频率意义下的实际置信水平。

关键词: Weibull 分布；兴趣参数；广义置信区间

分类号: **AMS**(2000) 62F25　　　**中图分类号**: O212.1　　　**文献标识码**: A

1　引言

Weibull 分布是应用广泛的寿命分布之一。对于 Weibull 分布的兴趣参数的置信区间，前人做过大量的研究也提出了许多方法。诸如基于参数的最好线性无偏估计、最好线性同变估计或最大似然估计确定未知参数的精确置信区间，用条件分布的方法给出参数的置信区间[1]，这些方法在计算上非常复杂，不便于处理。Rekkasa 和 Wongb 运用似然分析理论给出参数的近似置信区间[2]，这种方法虽然有较高的精确度，但是计算仍然很复杂。本文运用 Weerahandi 提出的广义枢轴量方法[3] 给出 Weibull 分布尺度参数、形状参数、分位数和可靠度函数的精确置信区间。

当我们求参数置信区间时，如果有讨厌参数存在，获得参数的精确置信区间将存在困难，对此 Weerahandi 提出了广义枢轴量的概念用于求参数的置信区间，令 $R=r(X;x,\xi)$ 是 X,x,ξ 的函数，其中 $\xi=(\theta,\eta)$，若 R 满足以下两条性质:

1)　R 的分布与 $\xi=(\theta,\eta)$ 无关;

2)　R 的观测值 $r_{\rm obs}=r(x;x,\xi)$ 不依赖于讨厌参数 η;

则称 R 为广义枢轴量，如果 R 的样本空间子集 C_r 满足等式 $P(R\in C_r)=\gamma(0<\gamma<1)$，则参数空间的子集 $\Theta_c(r)=\{\theta\in\Theta\,|\,r(x;x,\xi)\in C_r\}$ 称为 θ 的 $100\gamma\%$ 的广义置信区间。

本文结构如下：第二节给出兴趣参数的广义置信区间，第三节证明由广义枢轴量确定的广义置信区间具有频率性质。

2　Weibull 分布兴趣参数的广义置信区间

随机变量 Y 服从 Weibull 分布，概率密度为

$$\frac{\beta}{\lambda}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta-1}\exp\Big\{-\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}\Big\},\quad y>0,$$

收稿日期: 2008-04-07.　**作者简介**: 赵桂梅 (1978年7月生)，女，讲师. 研究方向：统计推断.

***基金项目**: 北方工业大学校科研基金.

其中$\beta > 0$是形状参数，$\lambda > 0$是尺度参数。令$X = \ln Y$, $\lambda = \mathrm{e}^{\mu}$, $\beta = \dfrac{1}{\sigma}$，则

$$X \sim \frac{1}{\sigma}\exp\Big\{\frac{x-\mu}{\sigma}\Big\}\exp\Big\{-\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\Big\} = \frac{1}{\sigma}f\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big),$$

这里$f(t) = \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{t}}$，$-\infty < t < +\infty$。所以$X$服从极值分布，是位置-尺度分布族。

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自此总体的独立同分布样本。令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

徐兴忠、李国英在枢轴分布族中的Fiducial推断[4]给出广义枢轴模型$\bar{X} \overset{d}{=} \mu + \sigma E_1$, $S \overset{d}{=} \sigma E_2$，其中

$$E_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i, \quad E_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i - E_1)^2, \quad e_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

是来自标准极值分布的独立同分布样本。则Fiducial模型为$\mu = \bar{x} - \sigma E_1$, $\sigma = \frac{s}{E_2}$。据此给出Weibull分布尺度参数、形状参数、分位数和可靠度函数的广义枢轴量。

考虑Weibull分布尺度参数λ的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间$(0 < \alpha < 1)$。构造广义枢轴量

$$R_1 = r\big\{(\bar{X}, S); (\bar{x}, s), (\mu, \sigma)\big\} = \bar{x} - s\frac{E_1}{E_2},$$

其中$E_1 = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$, $E_2 = \frac{S}{\sigma}$，$\bar{x}, s$是$\bar{X}, S$的观测值。R_1的分布与参数μ, σ无关，并且$r\{(\bar{x}, s); (\bar{x}, s), (\mu, \sigma)\} = \mu$，满足广义枢轴量的两个条件。设$0 < \alpha < 1$，令$\hat{g}_{1L}$, $\hat{g}_{1U}$分别表示R_1的分布的$100\frac{\alpha}{2}\%$分位数和$100(1-\frac{\alpha}{2})\%$分位数，有$P\{\hat{g}_{1L} < R_1 < \hat{g}_{1U}\} = 1-\alpha$，则$(\hat{g}_{1L}, \hat{g}_{1U})$是$\mu$的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间。所以Weibull分布尺度参数的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间为

$$\big(\exp\{\hat{g}_{1L}\}, \exp\{\hat{g}_{1U}\}\big). \tag{1}$$

考虑Weibull分布形状参数β的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间。构造广义枢轴量$R_2 = r\{S; s, \beta\} = \frac{E_2}{s}$，其中$E_2 = \frac{S}{\sigma} = S\beta$。显然$R_2$满足广义枢轴量的两个条件。令$\hat{g}_{2L}$, $\hat{g}_{2U}$分别表示R_2的分布的$100\frac{\alpha}{2}\%$分位数和$100(1-\frac{\alpha}{2})\%$分位数，有$P\{\hat{g}_{2L} < R_2 < \hat{g}_{2U}\} = 1-\alpha$，则$\beta$的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间为

$$(\hat{g}_{2L}, \hat{g}_{2U}). \tag{2}$$

考虑Weibull分布分位数的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间。Weibull分布的分位数为$\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}}$，可以写为$\mathrm{e}^{\mu}[-\ln(1-\alpha)]^{\sigma}$。构造广义枢轴量

$$R_3 = r\big\{(\bar{X}, S); (\bar{x}, s), (\mu, \sigma)\big\} = \mathrm{e}^{\bar{x} - s\frac{E_1}{E_2}}\big[-\ln(1-\alpha)\big]^{\frac{s}{E_2}},$$

R_3满足广义枢轴量的两个条件。令$\hat{g}_{3L}$, $\hat{g}_{3U}$分别表示R_3的分布的$100\frac{\alpha}{2}\%$分位数和$100(1-\frac{\alpha}{2})\%$分位数，有$P\{\hat{g}_{3L} < R_3 < \hat{g}_{3U}\} = 1-\alpha$，则分位数$\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}}$的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间为

$$(\hat{g}_{3L}, \hat{g}_{3U}). \tag{3}$$

考虑Weibull分布可靠度函数的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间。在给定y_0时，Weibull分布可靠度函数为$\exp\{-(\frac{y_0}{\lambda})^{\beta}\}$，令$x_0 = \ln y_0$，则可靠度函数为$\exp\{-\mathrm{e}^{\frac{x_0-\mu}{\sigma}}\}$，不妨先求$\frac{x_0-\mu}{\sigma}$的广义置信区间。构造广义枢轴量

$$R_4 = r\big\{(\bar{X}, S); (\bar{x}, s), (\mu, \sigma)\big\} = \frac{x_0 - \big(\bar{x} - s\frac{E_1}{E_2}\big)}{s/E_2},$$

可以证明R_4满足广义枢轴量的两个条件。令$\hat{g}_{4L}$, $\hat{g}_{4U}$分别表示R_4的分布的$100\frac{\alpha}{2}\%$分位数和$100(1-\frac{\alpha}{2})\%$分位数，有$P\{\hat{g}_{4L} < R_4 < \hat{g}_{4U}\} = 1-\alpha$，则$(\hat{g}_{4L}, \hat{g}_{4U})$就是$\frac{x_0-\mu}{\sigma}$的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间。所以可靠度函数$\exp\{-\mathrm{e}^{\frac{x_0-\mu}{\sigma}}\}$的$100(1-\alpha)\%$广义置信区间为

$$\Big(\exp\{-\mathrm{e}^{\hat{g}_{4U}}\}, \exp\{-\mathrm{e}^{\hat{g}_{4L}}\}\Big). \tag{4}$$

注1　徐兴忠，李国英[4]运用Fiducial推断的方法也给出了可靠度函数的精确置信限，其结果与本文据广义枢轴量确定的可靠度函数的广义置信区间是完全一致的。

注2　本文给定的Weibull分布兴趣参数的广义置信区间可以用Monte Carlo方法计算得出，因此与前人的结果相比，运算过程更加简捷方便。

3　频率性质

本节研究广义置信区间的频率性质就是研究兴趣参数落在广义置信区间的覆盖概率。

定理1　Weibull分布尺度参数λ的广义置信区间(1)具有频率意义下的实际置信水平$1-\alpha$，即$P\{\exp\{\hat{g}_{1L}\} < \lambda < \exp\{\hat{g}_{1U}\}\} = 1-\alpha$。

证明

$$P\Big\{\exp\{\hat{g}_{1L}\} < \lambda < \exp\{\hat{g}_{1U}\}\Big\} = P\{\hat{g}_{1L} < \mu < \hat{g}_{1U}\} = P\{\mu < \hat{g}_{1U}\} - P\{\mu < \hat{g}_{1L}\},$$

$$P\{\mu < \hat{g}_{1U}\} = P\Big\{F_{R_1}(\mu) < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\} = P\Big\{P\Big(\bar{X} - S\frac{E_1}{E_2} \le \mu\Big) < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\},$$

这里$F_{R_1}(\cdot)$表示R_1的分布函数。设$\bar{X} = \mu + \sigma E_1^*$，$S = \sigma E_2^*$，其中$E_1^*$, E_2^*分别与E_1, E_2独立同分布。令Q^*表示(E_1^*, E_2^*)的分布函数，Q表示(E_1, E_2)的分布函数。则上式为

$$Q^*\Big\{Q\Big\{\frac{E_1^*}{E_2^*} \le \frac{E_1}{E_2}\Big\} < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\} = Q^*\Big\{F\Big(\frac{E_1^*}{E_2^*}\Big) > \frac{\alpha}{2}\Big\} = 1-\frac{\alpha}{2},$$

这里$F(\cdot)$表示$\frac{E_1}{E_2}$的分布函数。所以$P\{\exp\{\hat{g}_{1L}\} < \lambda < \exp\{\hat{g}_{1U}\}\} = 1-\alpha$，结论得证。

定理2　Weibull分布形状参数β的广义置信区间(2)具有频率意义下的实际置信水平$1-\alpha$，即$P\{\hat{g}_{2L} < \beta < \hat{g}_{2U}\} = 1-\alpha$。

证明　证明同定理1，故略。

定理3　Weibull分布分位数$\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}}$的广义置信区间(3)具有频率意义下的实际置信水平$1-\alpha$，即$P\{\hat{g}_{3L} < \lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3U}\} = 1-\alpha$。

证明

$$\begin{aligned} &P\Big\{\hat{g}_{3L} < \lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3U}\Big\} \\ =\ &P\Big\{\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3U}\Big\} - P\Big\{\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3L}\Big\}. \end{aligned}$$

与定理1做相同的标记，则

$$\begin{aligned} P\{\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3U}\} &= P\Big\{F\big(\lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}}\big) < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\} \\ &= P\Big\{P\Big(\mathrm{e}^{\bar{X}-S\frac{E_1}{E_2}}\big[-\ln(1-\alpha)\big]^{\frac{S}{E_2}} \le \lambda\big[-\ln(1-\alpha)\big]^{\frac{1}{\beta}}\Big) < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\} \\ &= Q^*\Big\{Q\Big\{\frac{E_1^*-\ln[-\ln(1-\alpha)]}{E_2^*} \le \frac{E_1-\ln[-\ln(1-\alpha)]}{E_2}\Big\} < 1-\frac{\alpha}{2}\Big\} \\ &= Q^*\Big\{F\Big(\frac{E_1^*-\ln[-\ln(1-\alpha)]}{E_2^*}\Big) > \frac{\alpha}{2}\Big\} = 1-\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

这里 $F(\cdot)$ 表示 $\frac{E_1-\ln[-\ln(1-\alpha)]}{E_2}$ 的分布函数，所以 $P\{\hat{g}_{3L} < \lambda[-\ln(1-\alpha)]^{\frac{1}{\beta}} < \hat{g}_{3U}\} = 1-\alpha$，结论得证。

定理4 Weibull分布可靠度函数 $\exp\{-(\frac{y_0}{\lambda})^\beta\}$ 的广义置信区间(4)具有频率意义下的实际置信水平 $1-\alpha$，即

$$P\Big\{\exp\{-\mathrm{e}^{\hat{g}_{4L}}\} < \exp\Big\{-\Big(\frac{y_0}{\lambda}\Big)^\beta\Big\} < \exp\{-\mathrm{e}^{\hat{g}_{4U}}\}\Big\} = 1-\alpha.$$

证明 证明同定理1，故略。

由上述四个定理可知广义枢轴量确定的Weibull分布兴趣参数的广义置信区间的覆盖概率为 $1-\alpha$。Rekkasa和Wongb[1]由似然比方法给出了兴趣参数的近似置信区间不具备这样的性质。

参考文献：

[1] Lawless J F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data[M]. New York: Wiley, 1982

[2] Rekkas M, Wong A. Third-order inference for the Weibull distribution[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2005, 49(2): 499-525

[3] Weerahandi S. Generalized confidence intervals[J]. Journal of the American Statistical Associaation, 1993, 88(423): 899-905

[4] 徐兴忠，李国英. 枢轴分布族中的Fiducial推断[J]. 中国科学A辑，数学，2006, 36(3): 340-360
Xu X Z, Li G Y. Fiducial inference in the pivotal family of distributions[J]. Science in China: Series A, Mathematics, 2006, 49(3): 410-432

Generalized Confidence Intervals for Interest Parameters of the Weibull Distribution

ZHAO Gui-mei, CUI Yu-jie

(College of Science, North china University of Technology, Beijing 100144)

Abstract: The Weibull distribution, a kind of important life distributions, can be used to describe fatigue failure, vacuum tube failure and bearing failure, etc. In this paper, the generalized confidence intervals for the scale parameter, the shape parameter, the percentile and the reliability function of the Weibull distribution are investigated. Generalized confidence intervals of four interest parameters are constructed by using the concept of generalized pivotal quantity. At last, we prove that they have the exact confidence levels in sense of frequency.

Keywords: Weibull distribution; parameters of interest; generalized confidence intervals

Received: 07 Apr 2008. **Accepted:** 13 Jan 2010.

Foundation item: Research Fund Supported by the North China University of Technology.